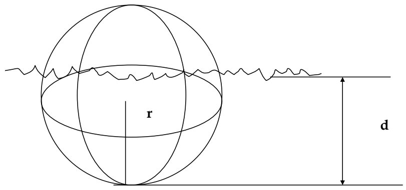
Icke-linjära ekvationer

f(x)=0

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Bollen i vattnet

- En boll med radien r och densiteten ρ hamnar i vatten, hur djupt ner (d) kommer den att ligga?



2 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Massan

- Massan hos vattnet som trängs undan av sfären ges av

$$M_w = \int_0^d \pi(r^2 - (x-r)^2)dx = \frac{\pi d^2(3r-d)}{3}$$

- Bollens massa

$$M_b = \frac{4\pi r^3 \rho}{3}$$

3 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Ekvationen

- Arkimedes lag :

$$M_b = M_w$$
$$\Leftrightarrow$$
$$M_b - M_w = 0$$

ger ekvationen :

$$\frac{\pi(d^3 - 3d^2 r + 4r^3\rho)}{3} = 0$$

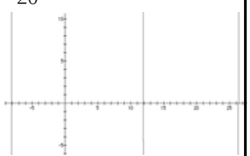
4 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Icke-linjär ekvation

- $r=10$ och $\rho=0.638$ ger

$$\frac{\pi(d^3 - 30d^2 + 2552)}{3} = f(d) = 0$$

$$f'(d) = 0 \Rightarrow d = 0, d = 20$$
$$f''(0) = -60 \Rightarrow maximum$$
$$f''(20) = 60 \Rightarrow minimum$$



5 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Ekvationslösning

- De metoder vi studerar för att lösa $f(x) = 0$ i ett givet intervall kräver
  - f är kontinuerlig, reellvärd i en variabel
  - f har en enkelrot i intervallet
- normalt kan $f(x) = 0$ inte lösas analytiskt

6 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

1

Grundidé

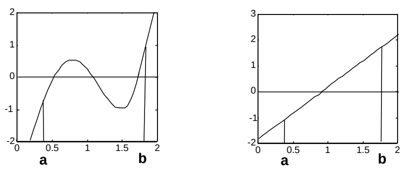
- bestäm en grov approximation till roten
- konstruera en talföljd som konvergerar mot roten
- En sådan metod kallas iterationsmetod
  - Hur konstruerar man metoden?
  - När hittar man roten? (Konvergens)
  - Feluppskattning

Iterationsmetoder

- Bestäm en grov approximation till roten
  - graf
  - tabell
  - Intervallhalveringsmetoden
- Det finns ofta flera lösningar, men alla behöver inte vara av intresse

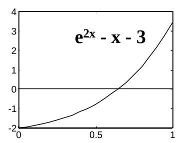
Grovlokalisering

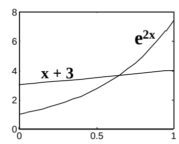
- $f(a) \cdot f(b) < 0$ och $f(x)$ kontinuerlig i $[a,b]$
  $\Rightarrow$ $f(x)$ har minst en rot i intervallet
- $f(x)$ strängt monoton i $[a,b]$
  $\Rightarrow$ $f(x)$ har högst en rot i intervallet



Exempel

- Hitta en startapproximation till positiva roten till
- $f(x) = e^{2x} - x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = x + 3$





x	f(x)
0.5000	-0.78
1.0000	3.39
0.7500	0.73
0.6250	-0.13

Intervallhalvering

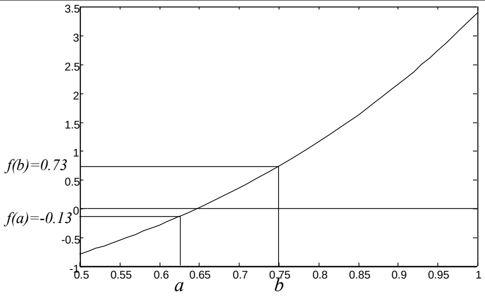
- Starta med intervall så att a och b ligger på var sin sida om roten, $f(a) \cdot f(b) < 0$

```
while |b-a| > önskad precision
    beräkna mittpunkten m = (b+a)/2
    om f(a)·f(m) > 0        % a och m på samma sida
       så    a := m         % flytta a
       annars b := m        % flytta b
endwhile
```


Intervallhalveringsmetoden

- Konvergerar alltid
- långsam konvergens
  - efter n steg är intervallet $2^{-n} \cdot$ längden av ursprungsintervallet
  - utnyttjar bara tecknet hos $f(x)$
    - funktionsvärdet beräknas men informationen används ej
- Hur utnyttja storleken på funktionsvärdet?

Utnyttja informationen i *f(x)*



Approximera med rät linje

- Rät linje genom (a, $f(a)$) och (b, $f(b)$) låt m vara linjens nollställe

$$m = b - \frac{f(b)}{\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

- Tecknet på $f(m)$ avgör vilken punkt som flyttas

Sekantmetoden

- De två sist beräknade x-värdena används
- Metoden inte lika robust
  - roten stängs inte in i ett intervall
  - beror mera av startvärde och utseende
  - Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}, n = 1,2,\ldots$$

Stoppvillkor

while (*abs(xn- xn-1)>0.5E-6*) & (*it<maxit*)

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x_{n-1}$
0	1.00000000000000	3.38905609893065	
1	0.50000000000000	-0.78171817154095	0.50000000000000
2	0.59371379519091	-0.31507744065424	0.40628620480909
3	0.62827292115555	-0.11500778845773	0.03455912596464
4	0.64813884587022	0.00752495705971	0.01986592471467
5	0.64691884357779	-0.00016400371232	0.00122000229243
6	0.64694486593776	-0.00000022679898	0.00002602235997
7	0.64694490197363	0.00000000000685	0.00000003603588

Newton-Raphsons metod

- Uttrycket

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

kan ses som en approximation av derivatan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Körning

n	x	f(x)
1	0.50000000000000	-0.78171817154095
2	0.67619902068169	0.19048787612537
3	0.64790891204313	0.00607415583676
4	0.64694597792046	0.00000677190608
5	0.64694490197389	0.00000000000844
6	0.64694490197254	0

Iterationsfunktion

- Newton - Raphson konvergerar mycket snabbt eller inte alls
- Kan skrivas om på formen

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Fixpunkt

- Om $f(x)$ definierad på $[a,b]$ och $\alpha = f(\alpha)$ för något $\alpha \in [a,b]$ så är α fixpunkt till $f(x)$
- x^* är rot till $f(x) = 0$
  ger $\quad x^* = \varphi(x^*)$
  $\Rightarrow$ x^* fixpunkt till $\varphi(x)$
- $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ fixpunktsiteration

Fixpunktsiteration

- $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ fixpunktsiteration
- Exempel : Bestäm en approximation av roten $\alpha \approx -0.2$ till ekvationen
  $$x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0$$

Vilka möjliga $\varphi(x_n)$ finns?

- $x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0$
- $4x = -x^3 + 4x^2 - 1$
  $\varphi_1(x_n) = 0.25 \cdot (-x^3 + 4x^2 - 1)$
- $x(x^2 - 4x + 4) = -1$
  $\varphi_2(x_n) = -(x^2 - 4x + 4)^{-1}$
- $4x^2 = (x^3 + 4x + 1)$
  $\varphi_3(x_n) = \pm 0.5 \cdot (x3 + 4x + 1)^{1/2}$
  (Söker neg. roten)

Iterationerna

k	φ1(xk)	φ2(xk)	φ3(xk)
1	-0.2080	-0.2066	-0.2191
2	-0.2045	-0.2054	-0.1682
3	-0.2060	-0.2056	-0.2840
4	-0.2054	-0.2056	0 - 0.1992i
5	-0.2057	-0.2056	-0.5331 + 0.1850i
6	-0.2055	-0.2056	-0.1901 - 0.5861i
7	-0.2056	-0.2056	-0.5784 + 0.4769i
8	-0.2056	-0.2056	-0.4217 - 0.6752i
9	-0.2056	-0.2056	-0.5673 + 0.6067i
10	-0.2056	-0.2056	-0.5103 - 0.6832i

Lite noggrannare…

k	φ1(xk)	φ2(xk)
1	-0.20800000000000	-0.20661157024793
2	-0.20448627200000	-0.20537530334273
3	-0.20604773483468	-0.20560562228596
4	-0.20535735736084	-0.20556268405923
5	-0.20566329142451	-0.20557068798776
6	-0.20552785547773	-0.20556919597473
7	-0.20558783915154	-0.20556947409978
8	-0.20556127800790	-0.20556942225465
9	-0.20557304047202	-0.20556943191907
10	-0.20556783172695	-0.20556943011753

När konvergerar det?

- Vi har fixpunktsiterationen $x_{n+1} = \varphi(x_n)$
- sätt $\varepsilon_n = x_n - x^*$
- $\varepsilon_n \to = 0$ då $x_n \to x^*$
  $\varepsilon_n = x_n - x^* =$
  $= \varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*)$ = [medelv.satsen]
  $= \varphi'(\xi_n)(x_{n-1} - x^*) =$
  $= \varphi'(\xi_n)\,\varepsilon_{n-1}$

25

Konvergens...

- Om $|\varphi'(\xi_n)| \le m < 1$ något m, så gäller
  $|\varepsilon_n| \le |\varphi'(\xi_n)| \cdot |\varepsilon_{n-1}| \le m \cdot |\varepsilon_{n-1}| < |\varepsilon_{n-1}|$
- Så om $|\varphi'(x)| \le m < 1$ i en omgiving av x^* som också innehåller x_0, kommer x_n att konvergera mot x^*.
- $|\varepsilon_n| \le m \cdot |\varepsilon_{n-1}| < m^2 |\varepsilon_{n-2}| < \ldots < m^n |\varepsilon_0|$
- m kan skattas med $(x_{n+1} - x_n)/(x_n - x_{n-1})$

26

... i vårt exempel

- $\alpha \in [-0.21, -0.20]$

$\boldsymbol{\varphi_1}$

- $\varphi(x_n) = 0.25 \cdot (-x^3 + 4x^2 - 1) \Rightarrow \varphi'(x) = 0.25 \cdot (-3x^2 + 8x)$
  $|\varphi'(x)| \le \mathbf{0.46 < 1}$

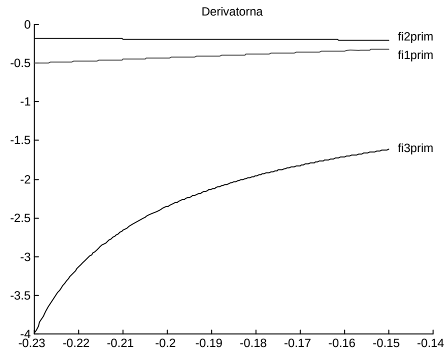
$\boldsymbol{\varphi_2}$

- $\varphi(x_n) = -(x^2 - 4x + 4)^{-1} \Rightarrow \varphi'(x) = (x^2 - 4x + 4)^{-2} \cdot (2x - 4)$
  $|\varphi'(x)| \le \mathbf{0.19 < 1}$

$\boldsymbol{\varphi_3}$

- $\varphi(x_n) = -0.5 \cdot (x3 + 4x + 1)^{1/2} \Rightarrow \varphi'(x) = -\dfrac{3x^2 + 4}{4\sqrt{x^3 + 4x + 1}}$
  $|\varphi'(x)| \ge \mathbf{2.3 > 1}$

27



28

Hur ser $|\varphi'(x)|$ ut i området?

x	φ₁'(x)	φ₂'(x)	φ₃'(x)
-0.2100	-0.4531	-0.1853	-2.6608
-0.2089	-0.4505	-0.1856	-2.6203
-0.2078	-0.4479	-0.1859	-2.5816
-0.2067	-0.4454	-0.1861	-2.5445
-0.2056	-0.4428	-0.1864	-2.5089
-0.2044	-0.4402	-0.1867	-2.4748
-0.2033	-0.4377	-0.1870	-2.4419
-0.2022	-0.4351	-0.1873	-2.4104
-0.2011	-0.4326	-0.1875	-2.3800
-0.2000	-0.4300	-0.1878	-2.3506
|φ|	≤ 0.46	≤ 0.19	≥ 2.3

29

Konvergerar Newton-Raphson?

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}}$$

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$\varphi'(x^*) = \frac{f(x^*)f''(x^*)}{(f'(x^*))^2} = 0 \qquad f(x^*) = 0!$$

Metoden bör alltså konvergera mycket snabbt

30

5

Taylorutveckla $\varphi(x)$ runt x^*

$\varphi(x_n) = \varphi(x^*) + (x_n - x^*)\,\varphi'(x^*) + 0.5\cdot(x_n - x^*)^2\,\varphi''(\eta)$

$x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $x^* = \varphi(x^*)$ och $\varphi'(x^*) = 0$ ger

$x_{n+1} - x^* = 0.5\cdot(x_n - x^*)^2\,\varphi''(\eta)$

sätt $\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - x^*$

$\varepsilon_{n+1} = 0.5\,\varepsilon_n^2\,\varphi''(\eta)$ ε_n

Vi jämför felet i två successiva punkter

31

Konvergensordning

- Konvergensordningen hos en talföljd som konvergerar mot x^* sägs vara r, om $r\geq 1$ är det största talet sådant att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^r} = C < \infty$$

(asymptotiska felkonstanten)

- Linjär konvergens $r=1$ och $C<1$
- Superlinjär konvergens $r>1$ och C konstant
- Kvadratisk konvergens $r=2$ och C konstant

32

Konvergenshastighet

Fixpunktsiterationer

- linjär konvergens = samma förbättring i varje iteration
- $C = \varphi'(x^*)$

Newton-Raphson

- kvadratisk konvergens = antalet korr.dec. fördubblas/ it.
- $C = 0.5\cdot \varphi''(x^*) = 0.5 f''(x^*)/f'(x^*)$

Sekant-metoden

- superlinjär konvergens $r = 1.618$
- $C = 0.5\cdot \varphi''(x^*) = 0.5\cdot(f''(x^*)/f'(x^*))^{0.618}$

33

Feluppskattning

- Konvergensordningen visar hur felet uppför sig då $n \to \infty$
- iterationsmetoder är självkorrigerande
  - avrundningsfel eller metod har ingen inverkan på den slutliga nogrannheten
- vi vill skatta felet i approximationen x_n till x^*

34

feluppskattning....

medelvärdessatsen ger

$f(x_n) = f(x_n) - f(x^*) = (x_n - x^*)\cdot f'(\xi)$

x^* enkelrot $\Rightarrow$ $f'(x^*) \neq 0$

$|x_n - x^*| = |f(x_n)| / |f'(\xi)|$

om $|f'(x)| \geq M$ för alla x nära x^*, så

$|x_n - x^*| \leq |f(x_n)| / M$

35

....feluppskattning

- närmevärde till $f(x_n)$

om $|\bar{f}(x_n) - f(x_n)| \leq \delta$

så gäller

$$|f(x_n)| \leq |\bar{f}(x_n)| + \delta$$

$$|x_n - x^*| \leq \frac{|\bar{f}(x_n)| + \delta}{M}$$

- Metodoberoende feluppskattningen

36

6

Gränsnoggrannheten

Idealet $f(x_n) = 0$ ger

$$|x_n - x^*| \le \frac{\partial}{M} = \varepsilon$$

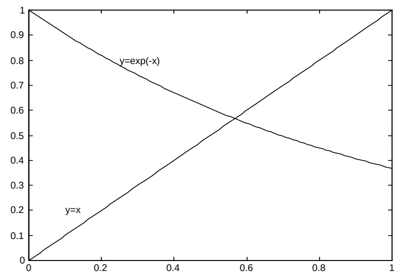
Exempel

$f(x) = x - e^{-x} = 0$ ger $x = e^{-x}$ dvs

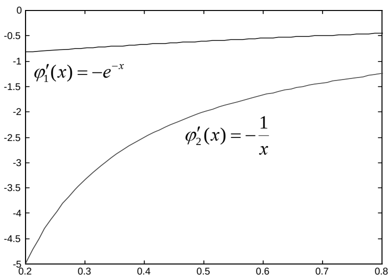
$x_{n+1} = e^{-x_n}$ eller $x_{n+1} = -ln(x_n)$

$\varphi_1(x) = e^{-x_n}$ $\varphi_2(x) = -ln(x_n)$

Grov rot



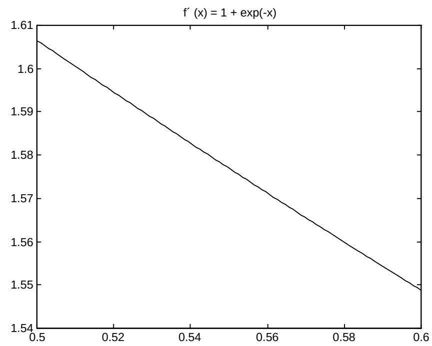
Deriva



Iterationerna

k	x_k	$\lvert f(x_k)\rvert$
1	6.0653e-01	1.0653e-01
2	5.4524e-01	6.1291e-02
3	5.7970e-01	3.4464e-02
4	5.6006e-01	1.9638e-02
5	5.7117e-01	1.1108e-02
6	5.6486e-01	6.3092e-03
7	5.6844e-01	3.5751e-03
8	5.6641e-01	2.0286e-03
9	5.6756e-01	1.1502e-03
10	5.6691e-01	6.5242e-04
11	5.6728e-01	3.6998e-04
12	5.6707e-01	2.0984e-04
13	5.6719e-01	1.1901e-04
14	5.6712e-01	6.7496e-05
15	5.6716e-01	3.8279e-05

f'(x) = 1+ e-x



Metodoberoende feluppskattning

$$|x_n - x^*| \le \frac{|f(x_n)| + \partial}{M}$$

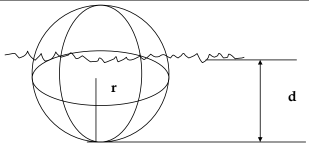
$|f'(x)| \ge M$ för alla x nära x^* $\quad M=1.54$ ur figur

Kolla några x_n

$$|x_4 - x^*| \le \frac{0.01964 + 0.5 \cdot 10^{-5}}{1.54} = 0.012756$$

$$|x_8 - x^*| \le \frac{0.0020286 + 0.5 \cdot 10^{-7}}{1.54} = 01.3173 \cdot 10^{-3}$$

Bollen i vattnet



d	*f(d)*
10	5.78053048e+02
11.84000000	6.52352133
11.86149267	2.68062515e-03
11.86150151	4.57161900e-10